追加練習問題

第１講　複素数の取り扱い

z の 2 次方程式

$$z^2+4iz-4-2i=0$$

を解け.

第2講　$\boldsymbol{n}$ 乗計算

$z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ とするとき $1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{2024}$ を求めよ.

第3講　複素数で点を移動

次の複素数 α，β，γ で作られる三角形の面積を求めよ．

$$\alpha=1+2i,\quad \beta=\alpha\times i,\quad \gamma=\alpha\times(1+i)$$

第４講　分数関数・無理関数

次の２つの曲線を図示して，２つの曲線がどちらも通らない象限があれば，それを答えよ．

$$y=\sqrt{x-1}-1,\quad y=\frac{3x-1}{x-2}$$

第５講　２次曲線

A(1, 1) からの距離と直線 $x+y+1=0$ からの距離が等しい点の軌跡を求めよ．

第6講　数列の極限

次の極限を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^n$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{2^n}$

第７講　級数

次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときにはその極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}}{2^{n}+1}$

第８講　関数の極限 ―その１―

次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x\sqrt{x}-x^2\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^x+3^x}{2^x-3^x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x$

第９講　関数の極限 ―その２―

次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\tan x)}{\tan x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{e^{\cos x}-1}{\cos x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\left(\frac{1}{2}\right)^x}$

第 10 講　関数の極限 ―その３―

次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x}\cos x^2$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2-0} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^x}{(x-1)^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{e^{-2x}+1}{e^{-2x}-1}$

第 11 講　微分の基本

$f'(x)$ を求めよ.

(1)　$f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^x-1}$

(2)　$f(x)=\dfrac{\sin x-\cos^2 x}{\cos x}$

(3)　$f(x)=\dfrac{(\log x)(\log x+x^3)}{\log x^3}$

(4)　$f(x)=(2x+4)^3$

第 12 講　微分の計算

$f'(x)$ を求めよ.

(1)　$f(x)=(3x+2)^5$

(2)　$f(x)=\sin 2x-\cos 3x+\tan 4x$

(3)　$f(x)=e^{5x}+\log 6x$

第13講　増減表の作成方法

$f(x)=e^x\cos x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ に関して，次の各問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を求めよ．

(2) $f'(x)>0$ となる x の範囲を求めよ．

(3) $f'(x)=0$ となる x を求めよ．

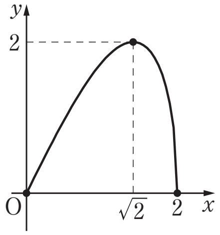
(4) $f'(x)=0$ となる x に対し，$f(x)$ の値を求めよ．

(5) 与えられた区間 $0\leqq x\leqq\pi$ の両端での $f(x)$ の値をそれぞれ求めよ．

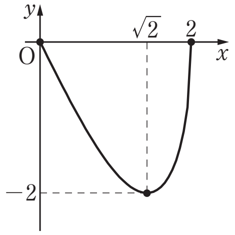
第14講　グラフの描き方

$f(x)=-x\sqrt{4-x^2}$ $(0\leqq x\leqq 2)$ とするとき，$y=f(x)$ の増減表をつくり，当てはまるグラフを次から選べ.

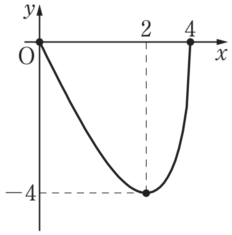
(A)



(B)



(C)



第15講　グラフを詳しく描く為の道具

$f(x)=\dfrac{\log x}{x^3}$ $(x>0)$ とする．$y=f(x)$ の変曲点を求めよ．

第 16 講　最大と最小

$f(\theta)=2\sin\theta+\sin 2\theta$ とする．$0\leqq\theta\leqq\pi$ における $f(\theta)$ の最大値を求めよ．

第17講　実数解の個数

k を実数とする．x の4次方程式 $x^4-4kx+3k=0$ が実数解をもたないような k の値の範囲を求めよ．

第18講　接線について

$y=\dfrac{\log x}{x^3}$ $(x>e)$ の $x=t$ における接線を l とする．l の x 切片と y 切片を求めよ．

第 19 講　積分の基本

不定積分を求めよ．ただし，積分定数には C を用いよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x+2)}\,dx$

(2) $\displaystyle\int (3x-4)^5\,dx$

(3) $\displaystyle\int (e^x+1)^3\,dx$

(4) $\displaystyle\int (4\cos^3 x-3\cos x)\,dx$

第 20 講　部分積分

不定積分を求めよ．ただし，積分定数には C を用いよ．

(1) $\displaystyle\int xe^{2x}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$

(3) $\displaystyle\int x^3\log x\,dx$

第 21 講　置換積分

定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x \, dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{3} \sqrt{9-x^2} \, dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{4\sqrt{3}} \frac{1}{16+x^2} \, dx$

第22講　面積

2つの曲線 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と $y=4\tan x\ \left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ によって囲まれる部分の面積を求めよ.

第 23 講　体積（回転体のみ）

次の各問いに答えよ.

(1)　$y=\cos x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸と y 軸により囲まれる部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ.

(2)　$y=x^2(x-1)$ と x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ.

(3)　$x^2+(y-1)^2=1$ $(x\geqq 0)$ と y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ.

第24講　積分で表された関数

$f(x)=\int_{x}^{2x}\frac{\cos t}{t}\,dt$ $(0<x<\pi)$ を最小にする x を求めよ．

追加練習問題解答

第1講　複素数の取り扱い

z の2次方程式

$$z^2+4iz-4-2i=0$$

を解け.

【答】 $-1-3i$, $1-i$

【解説】 $z^2+4iz-4-2i=0 \iff (z+2i)^2=2i$ であるが, $(1+i)^2=2i$ より
$z+2i=\pm(1+i)$ ∴ $z=-1-3i$, $1-i$

第2講　n 乗計算

$z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ とするとき $1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{2024}$ を求めよ.

【答】 1

【解説】 $z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\neq 1$ より $1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{2024}=\dfrac{1-z^{2025}}{1-z}$ とできる.

ここで $z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$ なので $z^8=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$ となるから,
$z^{2024}=(z^8)^{253}=1$ より $z^{2025}=z$ となる.

よって $1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{2024}=\dfrac{1-z^{2025}}{1-z}=1.$

第3講　複素数で点を移動

次の複素数 α，β，γ で作られる三角形の面積を求めよ．

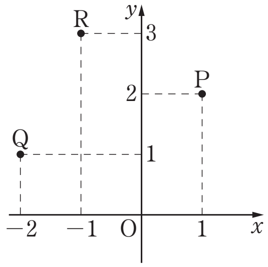
$$\alpha=1+2i,\quad \beta=\alpha\times i,\quad \gamma=\alpha\times(1+i)$$

【答】 $\dfrac{5}{2}$

【解説】 P(α)，Q(β)，R(γ) とする．

$$\beta=(1+2i)i=-2+i,\qquad \gamma=(1+2i)(1+i)=-1+3i$$

より下図の様になる．



RP＝RQ＝$\sqrt{5}$，PQ＝$\sqrt{10}$ より，△RPQ は直角二等辺三角形になるので，求める面積は

$$\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{2}=\frac{5}{2}.$$

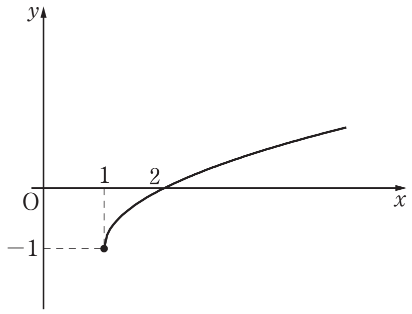
第4講　分数関数・無理関数

次の2つの曲線を図示して，2つの曲線がどちらも通らない象限があれば，それを答えよ．

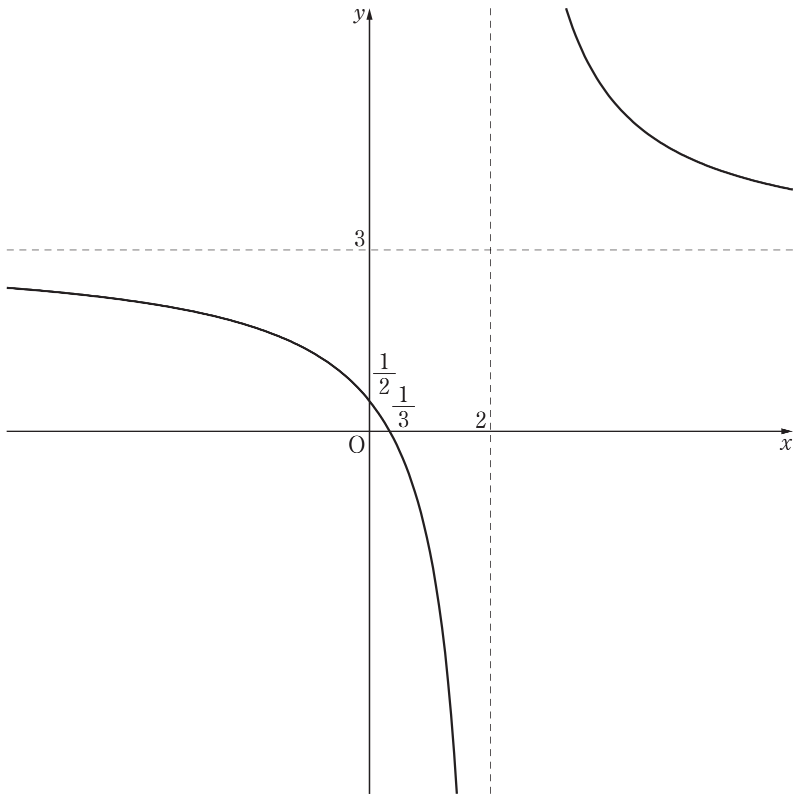
$$y=\sqrt{x-1}-1,\quad y=\frac{3x-1}{x-2}$$

【答】 第3象限

【解説】 $y=\sqrt{x-1}-1$ より $y+1=\sqrt{x-1}$ なので，$y=\sqrt{x}$ を x 軸方向に1，y 軸方向に -1 だけ平行移動したものと考えてグラフは下図．



$y=\dfrac{3x-1}{x-2}=3+\dfrac{5}{x-2}$ より $y=\dfrac{5}{x}$ を x 軸方向に2，y 軸方向に3だけ平行移動したものと考えてグラフは下図．



以上より，2つの曲線がどちらも通らないのは第3象限．

第５講　２次曲線

A(1, 1) からの距離と直線 $x+y+1=0$ からの距離が等しい点の軌跡を求めよ.

【答】 $x^2+y^2-2xy-6x-6y+3=0$

【解説】 P$(X,\ Y)$ とおくと $\mathrm{AP}=\sqrt{(X-1)^2+(Y-1)^2}$ であり,

Ｐと直線 $x+y+1=0$ の距離は $\dfrac{|X+Y+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|X+Y+1|}{\sqrt{2}}$ なので

$$\sqrt{(X-1)^2+(Y-1)^2}=\frac{|X+Y+1|}{\sqrt{2}}$$

$$\iff (X-1)^2+(Y-1)^2=\frac{(X+Y+1)^2}{2}$$

$$\iff X^2+Y^2-2X-2Y+2=\frac{X^2+Y^2+2XY+2X+2Y+1}{2}$$

$$\iff X^2+Y^2-2XY-6X-6Y+3=0$$

よって求める軌跡は $x^2+y^2-2xy-6x-6y+3=0$.

第６講　数列の極限

次の極限を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^n$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{2^n}$

【答】 (1)　0　　(2)　∞　　(3)　0

【解説】 (1)　$-1<-\dfrac{1}{2}<1$ なので $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$.

(2)　$2>1$ なので $\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^n=\infty$.

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^n=\infty$ であり $-1<\dfrac{2}{5}<1$ なので $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{2^n}=0$.

第７講　級数

次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときにはその極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n+1}$

【答】 (1) $\dfrac{1}{2}$　(2) 発散　(3) $-\dfrac{1}{3}$　(4) 発散

【解説】 (1) $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$ なので

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

となる．よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$.

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ なので

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) = \sqrt{n+1}-1$$

となる．よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-1\right)=\infty$.

よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ は発散する．

(3) $-1<-\dfrac{1}{2}<1$ なので $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{-\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{3}$.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{2^n}}=1$ なので $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n+1}$ は発散する．

第８講　関数の極限 ―その１―

次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x\sqrt{x}-x^2\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^x+3^x}{2^x-3^x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x$

【答】 (1)　$-\infty$　　(2)　-1　　(3)　極限なし　　(4)　∞

【解説】 (1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x\sqrt{x}-x^2\right)=\lim_{x\to\infty}x^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)=-\infty.$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^x+3^x}{2^x-3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x+1}{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1}=-1.$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to -0}\frac{1}{x^3}=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{1}{x^3}=\infty$ より $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}$ は極限なし．

(4)　$x=-t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ であり $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-t}=3^t$ となるので

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x=\lim_{t\to\infty}3^t=\infty.$$

第9講　関数の極限 ―その2―

次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\tan x)}{\tan x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\cos x}-1}{\cos x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\left(\frac{1}{2}\right)^x}$

【答】 (1) e　(2) 1　(3) 1　(4) 1

【解説】 (1) $\sin x=t$ とおくと，$x\to 0$ のとき $t\to 0$ なので，

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e.$$

(2) $\tan x=t$ とおくと，$x\to 0$ のとき $t\to 0$ なので，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\tan x)}{\tan x}=\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}=1.$

(3) $\cos x=t$ とおくと，$x\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき $t\to 0$ なので，$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\cos x}-1}{\cos x}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1.$

(4) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=t$ とおくと，$x\to\infty$ のとき $t\to 0$ なので，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\left(\frac{1}{2}\right)^x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1.$

第10講　関数の極限 —その3—

次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x}\cos x^2$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2-0} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^x}{(x-1)^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{e^{-2x}+1}{e^{-2x}-1}$

【答】 (1) 0　(2) ∞　(3) ∞　(4) 1

【解説】 (1) $-1\leqq\cos x^2\leqq 1$ より $-e^{-x}\leqq e^{-x}\cos x^2\leqq e^{-x}$ となる．

ここで $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(-e^{-x})=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}e^{-x}=0$ より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}e^{-x}\cos x^2=0$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2-0}\sqrt{4-x^2}=0$，$\displaystyle\lim_{x\to 2-0}x=2$ なので $\displaystyle\lim_{x\to 2-0}\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=\infty$.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(x-1)^2=0$，$\displaystyle\lim_{x\to 1}e^x=e$ なので $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{e^x}{(x-1)^2}=\infty$.

(4) $x=-t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ であり $\displaystyle\frac{e^{-2x}+1}{e^{-2x}-1}=\frac{e^{2t}+1}{e^{2t}-1}=\frac{1+\frac{1}{e^{2t}}}{1-\frac{1}{e^{2t}}}$ なので

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-2x}+1}{e^{-2x}-1}=\lim_{t\to\infty}\frac{1+\frac{1}{e^{2t}}}{1-\frac{1}{e^{2t}}}=1.$$

第11講　微分の基本

$f'(x)$ を求めよ．

(1)　$f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^x-1}$

(2)　$f(x)=\dfrac{\sin x-\cos^2 x}{\cos x}$

(3)　$f(x)=\dfrac{(\log x)(\log x+x^3)}{\log x^3}$

(4)　$f(x)=(2x+4)^3$

【答】　(1)　e^x　　(2)　$\dfrac{1}{\cos^2 x}+\sin x$　　(3)　$\dfrac{3x^3+1}{3x}$　　(4)　$24(x+2)^2$

【解説】　(1)　$f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^x-1}=\dfrac{(e^x-1)(e^x+1)}{e^x-1}=e^x+1$ なので，$f'(x)=e^x$.

(2)　$f(x)=\dfrac{\sin x-\cos^2 x}{\cos x}=\dfrac{\sin x}{\cos x}-\dfrac{\cos^2 x}{\cos x}=\tan x-\cos x$ なので，

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-(-\sin x)=\frac{1}{\cos^2 x}+\sin x.$$

(3)　$f(x)=\dfrac{(\log x)(\log x+x^3)}{\log x^3}=\dfrac{(\log x)(\log x+x^3)}{3\log x}=\dfrac{\log x+x^3}{3}$ なので

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}+3x^2}{3}=\frac{3x^3+1}{3x}.$$

(4)　$f(x)=(2x+4)^3=2^3(x+2)^3$ より $f'(x)=2^3\times 3(x+2)^2=24(x+2)^2$.

第12講　微分の計算

$f'(x)$ を求めよ．

（1）　$f(x)=(3x+2)^5$

（2）　$f(x)=\sin 2x-\cos 3x+\tan 4x$

（3）　$f(x)=e^{5x}+\log 6x$

【答】（1）　$15(3x+2)^4$　　（2）　$2\cos 2x+3\sin 3x+\dfrac{4}{\cos^2 4x}$　　（3）　$5e^{5x}+\dfrac{1}{x}$

【解説】（1）　$f(x)=(3x+2)^5$ より $f'(x)=5(3x+2)^4\times(3x+2)'=15(3x+2)^4$.

（2）　$f(x)=\sin 2x-\cos 3x+\tan 4x$ より

$$f'(x)=\cos 2x\times(2x)'-(-\sin 3x)\times(3x)'+\frac{1}{\cos^2 4x}\times(4x)'$$

$$=2\cos 2x+3\sin 3x+\frac{4}{\cos^2 4x}.$$

（3）　$f(x)=e^{5x}+\log 6x$ より $f'(x)=e^{5x}\times(5x)'+\dfrac{1}{6x}\times(6x)'=5e^{5x}+\dfrac{1}{x}$.

第13講　増減表の作成方法

$f(x)=e^x\cos x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ に関して，次の各問いに答えよ．

(1)　$f'(x)$ を求めよ．

(2)　$f'(x)>0$ となる x の範囲を求めよ．

(3)　$f'(x)=0$ となる x を求めよ．

(4)　$f'(x)=0$ となる x に対し，$f(x)$ の値を求めよ．

(5)　与えられた区間 $0\leqq x\leqq\pi$ の両端での $f(x)$ の値をそれぞれ求めよ．

【答】　(1)　$\sqrt{2}\,e^x\sin\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right)$　　(2)　$0\leqq x<\dfrac{\pi}{4}$　　(3)　$\dfrac{\pi}{4}$　　(4)　$\dfrac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$

(5)　$f(0)=1$，$f(\pi)=-e^\pi$

【解説】　(1)　$f(x)=e^x\cos x$ より $f'(x)=e^x\cos x+e^x(-\sin x)=\sqrt{2}\,e^x\sin\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right)$.

(2)　$f'(x)=\sqrt{2}\,e^x\sin\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right)$，$0\leqq x\leqq\pi$ より $\dfrac{3}{4}\pi\leqq x+\dfrac{3}{4}\pi\leqq\dfrac{7}{4}\pi$ なので

$$\sqrt{2}\,e^x\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)>0 \iff \frac{3}{4}\pi\leqq x+\frac{3}{4}\pi<\pi$$

よって $0\leqq x<\dfrac{\pi}{4}$.

(3)　(2)と同様に

$$\sqrt{2}\,e^x\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)=0 \iff x+\frac{3}{4}\pi=\pi$$

よって $x=\dfrac{\pi}{4}$.

(4)　$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{\pi}{4}}\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$

(5)　$f(0)=e^0\cos 0=1$，$f(\pi)=e^\pi\cos\pi=-e^\pi$.

ちなみに増減表は…

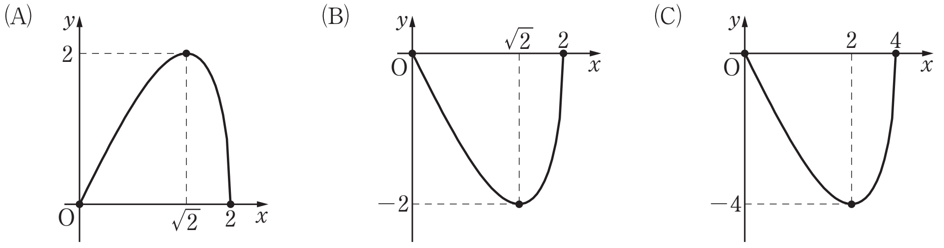
以上より，$f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	π
$f'(x)$	×	$+$	0	$-$	×
$f(x)$	1	↗	$\dfrac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	↘	$-e^\pi$

となります．

第 14 講　グラフの描き方

$f(x)=-x\sqrt{4-x^2}$ $(0\leqq x\leqq 2)$ とするとき，$y=f(x)$ の増減表をつくり，当てはまるグラフを次から選べ.



【答】 B

【解説】 $f(x)=-x\sqrt{4-x^2}$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-x)'\sqrt{4-x^2}+(-x)\cdot\frac{(4-x^2)'}{2\sqrt{4-x^2}} \\ &= -\sqrt{4-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \frac{2(x^2-2)}{\sqrt{4-x^2}} \end{aligned}$$

となるので，$f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$	×	$-$	0	$+$	×
$f(x)$	0	↘	-2	↗	0

となるので，あてはまるグラフは B.

第15講　グラフを詳しく描く為の道具

$f(x)=\dfrac{\log x}{x^3}$ $(x>0)$ とする．$y=f(x)$ の変曲点を求めよ．

【答】 $\left(e^{\frac{7}{12}},\ \dfrac{7}{12e^{\frac{7}{4}}}\right)$

【解説】 $f(x)=\dfrac{\log x}{x^3}=x^{-3}\log x$ なので

$$f'(x)=(x^{-3})'\log x+(x^{-3})(\log x)'=-3x^{-4}\log x+(x^{-3})\cdot\frac{1}{x}=x^{-4}(1-3\log x),$$

$$f''(x)=(x^{-4})'(1-3\log x)+x^{-4}(1-3\log x)'=-4x^{-5}(1-3\log x)+x^{-4}\left(-\frac{3}{x}\right)$$

$=x^{-5}(12\log x-7)$ より $f''(x)$ の符号が変化するのは $x=e^{\frac{7}{12}}$ だけで，この前後で $f''(x)<0$ から $f''(x)>0$ に変化している．

ここで $f\left(e^{\frac{7}{12}}\right)=\dfrac{\frac{7}{12}}{\left(e^{\frac{7}{12}}\right)^3}=\dfrac{7}{12e^{\frac{7}{4}}}$ なので，変曲点は $\left(e^{\frac{7}{12}},\ \dfrac{7}{12e^{\frac{7}{4}}}\right)$

第16講　最大と最小

$f(\theta)=2\sin\theta+\sin 2\theta$ とする．$0\leqq\theta\leqq\pi$ における $f(\theta)$ の最大値を求めよ．

【答】 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

【解説】 $f(\theta)=2\sin\theta+\sin 2\theta$ より $f'(\theta)=2\cos\theta+2\cos 2\theta=2\cos\theta+2(2\cos^2\theta-1)$
$=2(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)$ なので $f(\theta)$ の増減は

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		↗		↘	

となる．

　よって求める最大値は $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

第17講　実数解の個数

k を実数とする．x の4次方程式 $x^4-4kx+3k=0$ が実数解をもたないような k の値の範囲を求めよ．

【答】 $0<k<1$

【解説】 $f(x)=x^4-4kx+3k$ とおく．

$f\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{81}{256}\neq 0$ より $x=\dfrac{3}{4}$ は $f(x)=0$ の解ではないので，

$x^4-4kx+3k=0 \iff x^4=k(4x-3) \iff \dfrac{x^4}{4x-3}=k$ と変形できる．

このとき $g(x)=\dfrac{x^4}{4x-3}$ とおくと，

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{4x^3(4x-3)-x^4\cdot 4}{(4x-3)^2} \\ &= \frac{12x^3(x-1)}{(4x-3)^2} \end{aligned}$$

より，$g(x)$ の増減は

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$g'(x)$	×	$+$	0	$-$	×	$-$	0	$+$	×
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty/\infty$	↘	1	↗	∞

となるので，$y=g(x)$ と $y=k$ の異なる共有点の個数を考えて，求める k の範囲は $0<k<1$．

第18講　接線について

$y=\dfrac{\log x}{x^3}$ $(x>e)$ の $x=t$ における接線を l とする．l の x 切片と y 切片を求めよ．

【答】 順に $\dfrac{t(4\log t-1)}{3\log t-1}$，$\dfrac{4\log t-1}{t^3}$

【解説】 $y=\dfrac{\log x}{x^3}=x^{-3}\log x$ より $y'=-3x^{-4}\log x+x^{-3}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1-3\log x}{x^4}$ なので $x=t$ における接線は

$$y=\frac{1-3\log t}{t^4}(x-t)+\frac{\log t}{t^3}\quad\therefore\quad y=\frac{1-3\log t}{t^4}x+\frac{4\log t-1}{t^3}$$

これに $y=0$ を代入して $0=\dfrac{1-3\log t}{t^4}x+\dfrac{4\log t-1}{t^3}$　$\therefore$ $x=\dfrac{t(4\log t-1)}{3\log t-1}$.

　また $x=0$ を代入して $y=\dfrac{4\log t-1}{t^3}$.

　以上より，x 切片と y 切片は順に $\dfrac{t(4\log t-1)}{3\log t-1}$ と $\dfrac{4\log t-1}{t^3}$.

第 19 講　積分の基本

不定積分を求めよ．ただし，積分定数には C を用いよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x+2)}\,dx$

(2) $\displaystyle\int (3x-4)^5\,dx$

(3) $\displaystyle\int (e^x+1)^3\,dx$

(4) $\displaystyle\int (4\cos^3 x-3\cos x)\,dx$

【答】 (1) $\dfrac{1}{3}\log\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+C$　(2) $\dfrac{1}{18}(3x-4)^6+C$　(3) $\dfrac{1}{3}e^{3x}+\dfrac{3}{2}e^{2x}+3e^x+x+C$

(4) $\dfrac{1}{3}\sin 3x+C$

【解説】 (1) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x+2)}\,dx=\int \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$\displaystyle=\frac{1}{3}(\log|x-1|-\log|x+2|)+C=\frac{1}{3}\log\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C.$

(2) $\displaystyle\int (3x-4)^5\,dx=\frac{1}{6}(3x-4)^6\times\frac{1}{3}+C=\frac{1}{18}(3x-4)^6+C.$

(3) $\displaystyle\int (e^x+1)^3\,dx=\int (e^{3x}+3e^{2x}+3e^x+1)\,dx$

$\displaystyle=e^{3x}\times\frac{1}{3}+3e^{2x}\times\frac{1}{2}+3e^x+x+C=\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{3}{2}e^{2x}+3e^x+x+C.$

(4) $\displaystyle\int (4\cos^3 x-3\cos x)\,dx=\int \cos 3x\,dx=\sin 3x\times\frac{1}{3}+C=\frac{1}{3}\sin 3x+C.$

第20講　部分積分

不定積分を求めよ．ただし，積分定数には C を用いよ．

(1) $\displaystyle\int xe^{2x}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$

(3) $\displaystyle\int x^3\log x\,dx$

【答】 (1) $\dfrac{1}{4}(2x-1)e^{2x}+C$　(2) $x\tan x+\log|\cos x|+C$　(3) $\dfrac{1}{16}x^4(4\log x-1)+C$

【解説】 (1) $\displaystyle\int xe^{2x}\,dx=x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int 1\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C=\frac{1}{4}(2x-1)e^{2x}+C.$

(2) $\displaystyle\int\frac{x}{\cos^2 x}\,dx=\int x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx=x\cdot\tan x-\int 1\cdot\tan x\,dx$

$\displaystyle=x\tan x+\int\frac{-\sin x}{\cos x}\,dx=x\tan x+\log|\cos x|+C.$

(3) $\displaystyle\int x^3\log x\,dx=\frac{1}{4}x^4\cdot\log x-\int\frac{1}{4}x^4\cdot\frac{1}{x}\,dx=\frac{1}{4}x^4\log x-\int\frac{1}{4}x^3\,dx$

$\displaystyle=\frac{1}{4}x^4\log x-\frac{1}{16}x^4+C=\frac{1}{16}x^4(4\log x-1)+C.$

第21講　置換積分

定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos^2 x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{4\sqrt{3}} \frac{1}{16+x^2}\,dx$

【答】 (1) $\dfrac{2}{15}$　(2) $\dfrac{9}{4}\pi$　(3) $\dfrac{\pi}{12}$

【解説】 (1) $\cos x=t$ と置換する．$\cos x=t$ の両辺を x で微分すると $-\sin x=\dfrac{dt}{dx}$ なので $dx=\dfrac{dt}{-\sin x}$.

この両辺に $\sin^3 x\cos^2 x$ をかけることで

$$\begin{aligned}\sin^3 x\cos^2 x\,dx &= \sin^3 x\cos^2 x\times\frac{dt}{-\sin x}\\ &= -\sin^2 x\cos^2 x\,dt=(t^2-1)t^2\,dt\end{aligned}$$

となる．また $x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\cos\dfrac{\pi}{2}=t$ より $t=0$，$x=0$ のとき $\cos 0=t$ より $t=1$ なので

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos^2 x\,dx=\int_1^0(t^2-1)t^2\,dt=\int_0^1(t^2-t^4)\,dt=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right]_0^1=\frac{2}{15}.$$

(2) $3\sin\theta=x$ と置換する．$3\sin\theta=x$ の両辺を θ で微分すると $3\cos\theta=\dfrac{dx}{d\theta}$ なので $dx=3\cos\theta\,d\theta$.

また $\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-(3\sin\theta)^2}=3\sqrt{1-\sin^2\theta}=3\sqrt{\cos^2\theta}=3|\cos\theta|$ であり，

$x=3$ のとき $3\sin\theta=3$ より $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$x=0$ のとき $3\sin\theta=0$ より $\theta=0$ なので

$$\begin{aligned}\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}3|\cos\theta|\cdot 3\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}9\cos^2\theta\,d\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{9}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=\left[\frac{9}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{9}{4}\pi\end{aligned}$$

(3) $4\tan\theta=x$ と置換する．$4\tan\theta=x$ の両辺を θ で微分すると $\dfrac{4}{\cos^2\theta}=\dfrac{dx}{d\theta}$ なので $dx=\dfrac{4}{\cos^2\theta}\,d\theta$.

また $\dfrac{1}{16+x^2}=\dfrac{1}{16+16\tan^2\theta}=\dfrac{1}{16(1+\tan^2\theta)}=\dfrac{\cos^2\theta}{16}$ であり，

$x=4\sqrt{3}$ のとき $4\tan\theta=4\sqrt{3}$ より $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$x=0$ のとき $4\tan\theta=0$ より $\theta=0$ なので

$$\begin{aligned}\int_0^{4\sqrt{3}} \frac{1}{16+x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2\theta}{16}\cdot\frac{4}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{4}\,d\theta = \left[\frac{1}{4}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

となる.

第22講　面積

2つの曲線 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と $y=4\tan x$ $\left(0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ によって囲まれる部分の面積を求めよ.

【答】 $2\log 3-2$

【解説】 $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}=4\tan x$ より $\sqrt{3}=4\sin x\cos x$, つまり $\sin 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ なので $2x=\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{2}{3}\pi$. ゆえに $x=\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{3}$.

ここで $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{3}$ のとき $\dfrac{\pi}{3}<2x<\dfrac{2}{3}\pi$ より $\sin 2x>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, つまり $4\sin x\cos x>\sqrt{3}$ となるが, $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{3}$ のとき $\cos x>0$ なので $4\sin x\cos x>\sqrt{3}\iff 4\tan x>\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}$ となる.

以上より求める面積は

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(4\tan x-\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}\right)dx &= \Big[-4\log|\cos x|-\sqrt{3}\tan x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\\ &= \left(-4\log\frac{1}{2}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\right)-\left(-4\log\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\\ &= 2\log 3-2\end{aligned}$$

第23講　体積（回転体のみ）

次の各問いに答えよ．

(1)　$y=\cos x\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸と y 軸により囲まれる部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．

(2)　$y=x^2(x-1)$ と x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．

(3)　$x^2+(y-1)^2=1\ (x\geqq 0)$ と y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．

【答】 (1) $\dfrac{\pi^2}{4}$　(2) $\dfrac{1}{105}\pi$　(3) $\dfrac{4}{3}\pi$

【解説】 (1)　求める体積は

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi(\cos x)^2dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2}(1+\cos 2x)\,dx\\ &= \left[\frac{\pi}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{\pi^2}{4}\end{aligned}$$

(2)　$0=x^2(x-1)$ より $x=0,\ 1$ なので求める体積は

$$\begin{aligned}\int_0^1\pi\{x^2(x-1)\}^2dx &= \int_0^1\pi x^4(x-1)^2dx\\ &= \int_0^1\pi(x^6-2x^5+x^4)\,dx\\ &= \left[\pi\left(\frac{1}{7}x^7-\frac{1}{3}x^6+\frac{1}{5}x^5\right)\right]_0^1\\ &= \frac{1}{105}\pi\end{aligned}$$

(3)　$x^2+(y-1)^2=1\ (x\geqq 0)$ と $x=0$ より $(y-1)^2=1$．よって $y=0,\ 2$ となる．

また $x^2=1-(y-1)^2$ より，求める体積は

$$\begin{aligned}\int_0^2\pi\{1-(y-1)^2\}dy &= \int_0^2\pi(2y-y^2)\,dy\\ &= \left[\pi\left(y^2-\frac{1}{3}y^3\right)\right]_0^2\\ &= \frac{4}{3}\pi\end{aligned}$$

第24講　積分で表された関数

$f(x)=\int_x^{2x}\frac{\cos t}{t}dt\ (0<x<\pi)$ を最小にする x を求めよ.

【答】 $\frac{2}{3}\pi$

【解説】 $f(x)=\int_x^{2x}\frac{\cos t}{t}dt$ より $f'(x)=\frac{\cos 2x}{2x}\times(2x)'-\frac{\cos x}{x}\times(x)'=\frac{\cos 2x-\cos x}{x}$

となる.

ここで $f'(x)>0$ となる x は，$0<x<\pi$ であることに注意すると

$$\frac{\cos 2x-\cos x}{x}>0 \iff 2\cos^2 x-\cos x-1>0$$
$$\iff (2\cos x+1)(\cos x-1)>0$$
$$\iff \cos x<-\frac{1}{2}$$

つまり $\frac{2}{3}\pi<x<\pi$ であることなどより，$f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

となるので，$f(x)$ を最小にする x は $x=\frac{2}{3}\pi$.